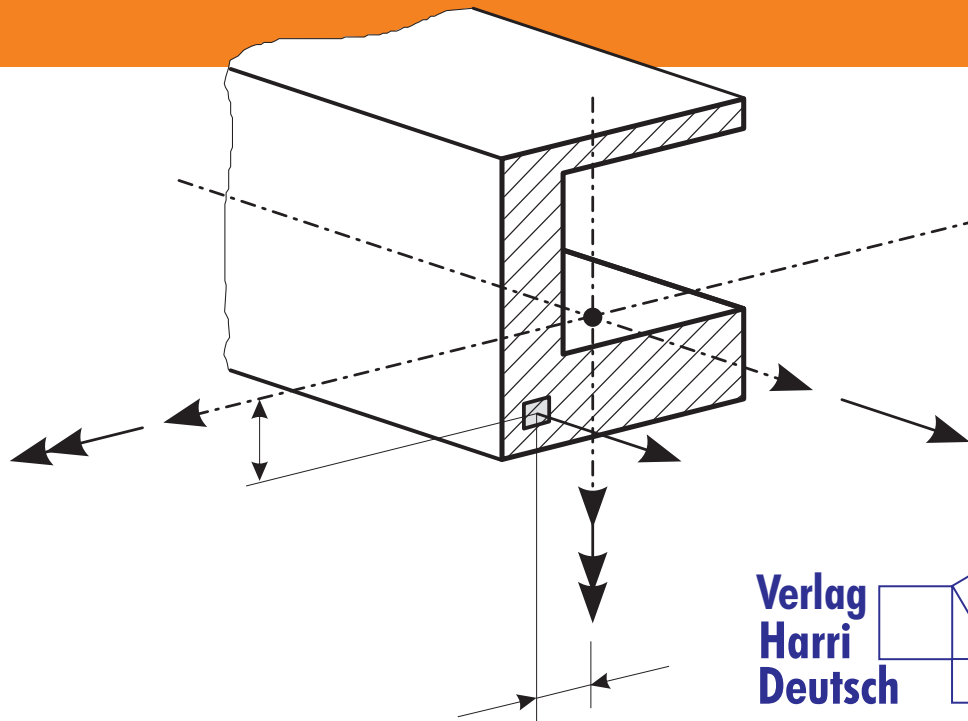
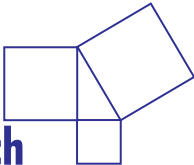


G. Knappstein

# Aufgaben zur Festigkeitslehre – ausführlich gelöst

Mit Grundbegriffen, Formeln, Fragen, Antworten



Verlag  
Harri  
Deutsch 

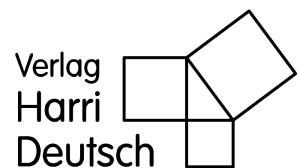
**Aufgaben zur Festigkeitslehre**  
**– ausführlich gelöst**



G. Knappstein

# **Aufgaben zur Festigkeitslehre – ausführlich gelöst**

Mit Grundbegriffen, Formeln, Fragen, Antworten



## **Der Autor**

Dipl.-Ing. Gerhard Knappstein war nach seiner Ausbildung zum Werkzeugmacher und dem Maschinenbaustudium als Konstrukteur und Berechnungsingenieur in der Industrie tätig. Er ist Mitarbeiter im Fachbereich Maschinenbau – Fachgebiet Technische Mechanik – an der Universität Siegen.

## **Die Webseite zum Buch**

<http://www.harri-deutsch.de/1871.html>

## **Der Verlag**

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH  
Gräfstraße 47  
60486 Frankfurt am Main  
verlag@harri-deutsch.de  
www.harri-deutsch.de

## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

## **ISBN 978-3-8171-1871-7**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden.

Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

5., überarbeitete und erweiterte Auflage 2010

©Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2010

Druck: fgb – freiburger graphische betriebe <[www.fgb.de](http://www.fgb.de)>

Printed in Germany

# Vorwort

Zum richtigen Verstehen und Einordnen der theoretischen Grundlagen des Mechanikfachs *Festigkeitslehre (Elastostatik)* ist das selbständige Lösen von entsprechenden Aufgaben unverzichtbar. Dieser Grund und die immer wiederkehrende Frage der Studierenden nach Aufgaben mit vollständigen Lösungen waren unter anderem Anlass, dieses Buch zu schreiben.

Das Buch, dessen Inhalt sich am Stoff der Vorlesungen in Festigkeitslehre an Universitäten und Fachhochschulen orientiert, bietet

- *zahlreiche ausführlich und lehrbeispielhaft gelöste Aufgaben,*
- *die notwendigen Grundbegriffe und Formeln zum schnellen Nachschlagen in überschaubarer Form,*
- *Verständnisfragen und Antworten zum Überprüfen der Kenntnisse,*
- *computerunterstütztes Lösen von Aufgaben aus dem Gebiet der Festigkeitslehre und*
- *Leitlinien zum Lösen von Mechanik-Aufgaben.*

Es ergänzt außerdem die vielfältigen Mechanik-Lehrbücher.

Die Aufgaben sind so ausgewählt, dass alle wichtigen Teilgebiete der Festigkeitslehre behandelt werden.

Bei den Lösungen habe ich versucht, den Lösungsweg so zu gestalten, dass er für jeden verständlich ist. Die Lösungen sind nicht nur stichwortartig dargestellt, sondern sehr ausführlich gelöst, wobei vor allem der "*rote Faden*" des Lösungswegs gut erkennbar ist, was in erster Linie durch eine umfangreiche und sinnvolle Bebilderung unterstützt wird. Durch Zeichnungen sind Studierende oftmals viel schneller über schwierige Sachverhalte "**im Bilde**", als das je mit Text geschehen könnte.

Bei einigen Aufgaben werden mehrere Lösungswege dargestellt sowie Ergebniserläuterungen vorgenommen.

Leitlinien zum Lösen von Mechanik-Aufgaben als grundsätzliches Lösungsverfahren werden angegeben, da erfahrungsgemäß viele Studienanfänger den Weg von der Problemstellung zur Lösung verlieren, wenn er nicht systematisch angelegt wird.

Um den größten Nutzen aus dem Buch zu ziehen, empfehle ich den Studierenden, die Lösungen nicht nur durchzulesen, sondern auch zu versuchen, die Aufgaben selbständig zu lösen und nachzuvollziehen. Unbedingt erforderlich ist, dass Aufgabenlösungen – nicht nach „*Schema F*“, sondern mit *Verstand* und den Grundgesetzen der Mechanik – durchzuführen sind. Hilfreich ist oft, die Aufgaben und Verständnisfragen zu zweit oder zu dritt durchzuarbeiten, zu vergleichen und die Lösungen und Antworten zu diskutieren.

In der vorliegenden 5. Auflage habe ich weitere ausführlich gelöste Aufgaben eingefügt sowie eine Formelsammlung zur Statik aufgenommen, da die Festigkeitslehre aufs engste mit der Statik verknüpft ist. Außerdem habe ich eine Zusammenstellung der häufig benutzten Formelzeichen angegeben.

Die vollständigen MATLAB-Programme stehen auf der Homepage zum Buch, erreichbar über die des Harri Deutsch Verlages [www.harri-deutsch.de](http://www.harri-deutsch.de), zur Verfügung.

Dem Verlag Harri Deutsch danke ich für die gute Zusammenarbeit.

Siegen, im Sommer 2010

Gerhard Knappstein

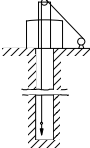

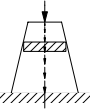
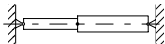
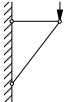
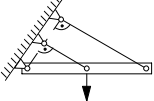
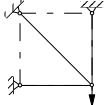
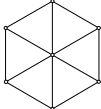
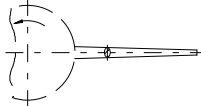
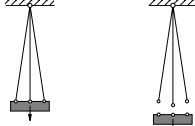


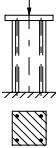
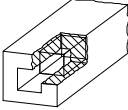
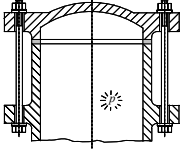

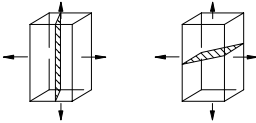
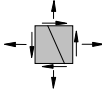
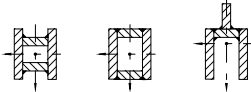

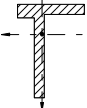

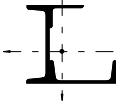
# Inhalt

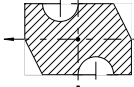
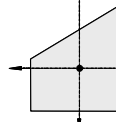

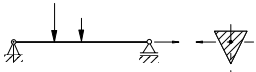
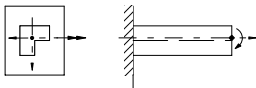
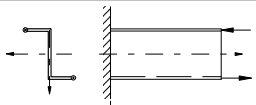
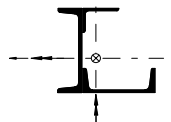
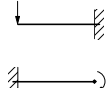

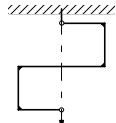

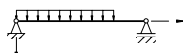
<b>1</b>	<b>Zug und Druck in Stäben; Dehnungen und Verschiebungen</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Der ein- und zweiachsige Spannungszustand</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Biegung: Normalspannungen durch Biegemomente und Normalkraft; Schiefe Biegung; Verformungen durch Biegemomente</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Torsion</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>6</b>	<b>Querkraftschub; Schubmittelpunkt</b> . . . . .	<b>133</b>
<b>7</b>	<b>Knickung</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>8</b>	<b>Aufgaben mit Anwendungen aus verschiedenen Gebieten der Elastostatik</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>9</b>	<b>Aufgaben zu CASTIGLIANO, MOHRsches Arbeitsintegral (Arbeitssatz), Kraftgrößenverfahren</b> . . . . .	<b>183</b>
	<b>Verständnisfragen</b> . . . . .	<b>193</b>
	<b>Antworten zu den Verständnisfragen</b> . . . . .	<b>201</b>
	<b>Computerunterstütztes Lösen von Aufgaben</b> . . . . .	<b>215</b>
	Programm <b>QUERP</b> . . . . .	<b>215</b>
	Programm <b>BIEGNO</b> . . . . .	<b>220</b>
	<b>Anhang:</b>	
	<b>Einige Grundbegriffe und Formeln der Festigkeitslehre</b> . . . . .	<b>233</b>
	A1 Einheiten; Spannungen . . . . .	<b>233</b>
	A2 Verformungen . . . . .	<b>234</b>
	A3 Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformungen . . . . .	<b>235</b>
	A4 Zug und Druck in Stäben . . . . .	<b>235</b>
	A5 Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente . . . . .	<b>237</b>
	A6 Biegung . . . . .	<b>242</b>
	A7 Torsion . . . . .	<b>245</b>
	A8 Lage der Schubmittelpunkte von dünnwandigen Profilen . . . . .	<b>249</b>
	A9 Querkraftschub . . . . .	<b>250</b>
	A10 Knickung . . . . .	<b>250</b>

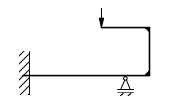
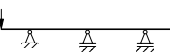
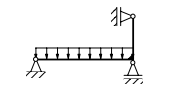
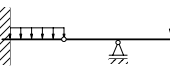
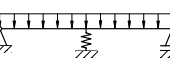
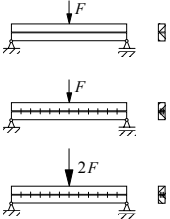
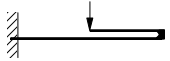
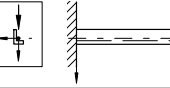
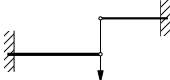
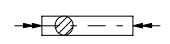
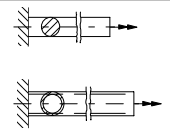
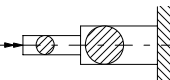
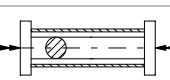



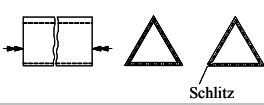
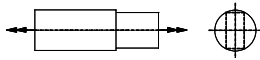

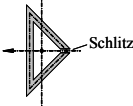
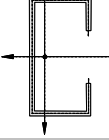
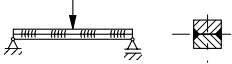
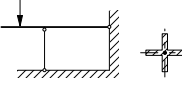

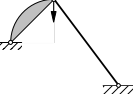
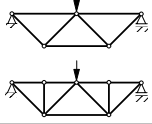
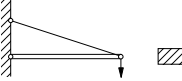
A11	Dünnwandige Behälter (Membranschalen) unter Innendruck . . . .	253
A12	Festigkeitshypothesen, Vergleichsspannung . . . . .	254
A13	Zugfestigkeit $R_m$ , Streckgrenze $R_{p0,2}$ und Bruchdehnung $A_5$ eini- ger Werkstoffe . . . . .	255
A14	Zulässige Spannungen für Kran-Stahltragwerke . . . . .	255
A15	Ausgewählte Werkstoffkennwerte . . . . .	256
A16	Anwendung des Energieprinzips bei Biegebeanspruchung (CASTIGLIANO, MOHRsches Arbeitsintegral, Kraftgrößenverfahren)	257
<b>Leitlinien zum Lösen von Mechanik-Aufgaben</b> . . . . .		261
<b>Schematischer Verlauf einer Festigkeitsberechnung</b> . . . . .		262
<b>Gegenüberstellung von neuen und alten Werkstoffbezeichnungen (Auswahl)</b> . . . . .		263
<b>Einige Grundlagen und Formeln aus der Statik</b> . . . . .		264
S1	Kräfte, Lagerungen, Freimachen, Axiome, Schnittprinzip . . . . .	264
S2	Zentrales Kräftesystem. . . . .	269
S3	Allgemeines Kräftesystem . . . . .	272
S4	Ebenes Fachwerk . . . . .	275
S5	Schnittgrößen am Balken . . . . .	277
S6	Schwerpunkt . . . . .	279
S7	Haftung und Reibung . . . . .	283
S8	Biegeschlaffes Seil . . . . .	284
<b>Das griechische Alphabet</b> . . . . .		286
<b>Vorsätze und Vorsatzzeichen für dezimale Teile und Vielfache von Ein- heiten</b> . . . . .		286
<b>Einheitennamen und Einheitenzeichen</b> . . . . .		287
<b>Einige Formeln aus der Mathematik</b> . . . . .		288
<b>Häufig benutzte Formelzeichen</b> . . . . .		289
<b>Forscher und Lehrer auf dem Gebiet der Festigkeitslehre</b> . . . . .		291
<b>Literatur</b> . . . . .		294
<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .		295

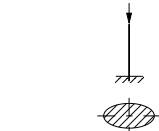
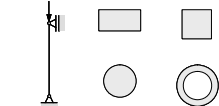
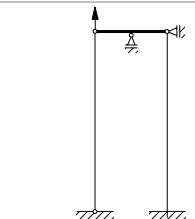
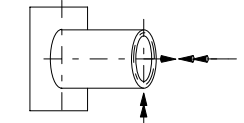
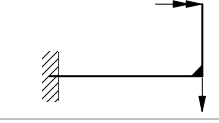

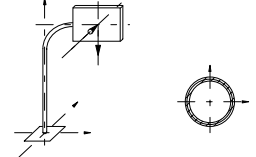
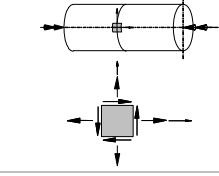
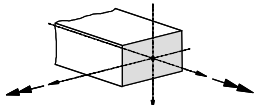
Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
	<b>1 Zug und Druck in Stäben; Dehnungen und Verschiebungen</b>		1
1.1	Dehnung und Verlängerung eines Seiles; Reißlänge		2
1.2	Dehnung von Stäben aus unterschiedlichem Material		5
1.3	Spannungsverläufe $\sigma$ in einem Stab mit veränderlichem Querschnitt infolge Eigengewicht und äußerlicher Belastung		6
1.4	Abgesetzter Stahlzylinder unter Temperaturbelastung (Kräfte und Verschiebung)		9
1.5	Verschiebungen in einem Stabwerk (Stäbe mit unterschiedlicher Dehnsteifigkeit)		11
1.6	Lagerungsstäbe (verschiedene Querschnitte) eines starren Trägers (statisch unbestimmt); Stabkräfte, Spannungen, Verschiebungen		14
1.7	Stabkräfte und Verschiebungen in einem Fachwerk (statisch unbestimmt)		16
1.8	Fachwerk unter Temperaturbelastung (Stäbe mit unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten)		19
1.9	Dehnung und Spannung in einem fliehkraftbeanspruchten Stab		21
1.10	Spannungen in den drei Seilen einer Lastaufhängung (mit Fehlmaß) (statisch unbestimmt)		24

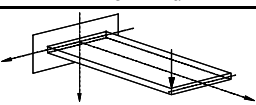
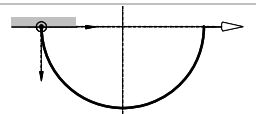
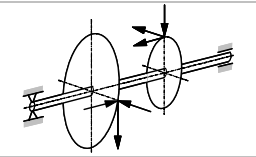
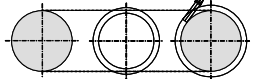
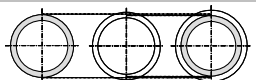

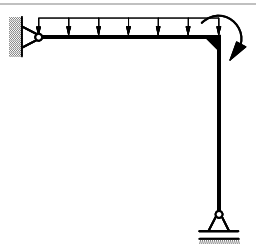
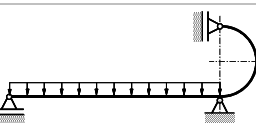
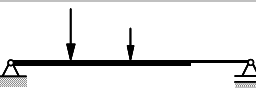
Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
1.11	Lastaufnahme bei Druckstab aus unterschiedlichen Materialien (statisch unbestimmt)		29
1.12	Dehnungen und Spannungen bei einem zweiachsigen Spannungszustand		31
1.13	Dehnung von Schrauben (Dehnschrauben)		33
<b>2 Der ein- und zweiachsige Spannungszustand</b>			35
2.1	Spannungen in der Schweißnaht eines Blechstreifens (einachsiger Spannungszustand)		36
2.2	Spannungen in der Schnittfläche eines Quaders (einachsiger Spannungszustand und zweiachsiger Hauptnormalspannungszustand)		38
2.3	Allgemeiner ebener Spannungszustand		41
<b>3 Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente</b>			45
3.1	Drei Querschnitte mit gleichem Flächeninhalt im Vergleich		46
3.2	Rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt (Hauptträgheitsmomente, Hauptachsen)		49
3.3	Unsymmetrischer T-förmiger Querschnitt		52
3.4	Gedrehter Rechteckquerschnitt		56
3.5	Aus Stahlbau-Profilen zusammengesetzter Querschnitt		57

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
3.6	Aus Grundflächen zusammengesetzter Querschnitt		61
3.7	Trapezförmiger Querschnitt		65
<b>4 Biegung: Normalspannungen durch Biegemomente und Normalkraft; Schiefe Biegung; Verformungen durch Biegemomente</b>			67
4.1	Einachsige Biegung; Biegespannungsverteilung		68
4.2	Einachsige Biegung; Biegespannungsverteilung		71
4.3	Schiefe Biegung; Spannungs-Null-Linie; Biegespannungsverteilung		74
4.4	Schiefe Biegung; Spannungs-Null-Linie; Spannungsverteilung		77
4.5	Schiefe Biegung mit Normalkraftbeanspruchung; Spannungs-Null-Linie; Spannungsverteilung		80
4.6	Biegelinie		83
4.7	Durchbiegung am freien Ende (mit Überlagerung)		86
4.8	Biegeverformung (mit Überlagerung)		88
4.9	Biegelinie		90
4.10	Durchbiegung, Neigungswinkel		92

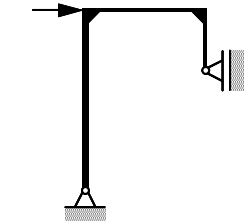
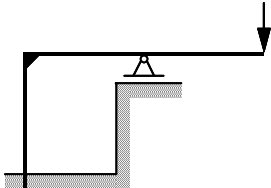
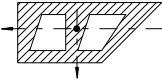
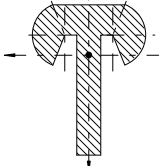
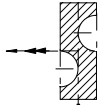
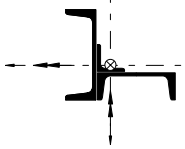
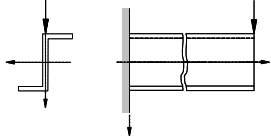
Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
4.11	Auflagerreaktionen, Neigungswinkel, Differentialgleichung der elastischen Biegelinie (statisch unbestimmtes System)		96
4.12	Auflagerreaktionen, Differentialgleichung der elastischen Biegelinie, Superpositionsprinzip (statisch unbestimmtes System)		100
4.13	Auflagerreaktion, Superpositionsprinzip (statisch unbestimmtes System)		104
4.14	Verschiebungen (Superposition)		106
4.15	Auflagerreaktion bei elastischem Lager, Durchbiegung, Superpositionsprinzip (statisch unbestimmtes System)		108
4.16	Auswirkungen der schubfesten Verbindung zweier Träger auf die Biegespannung und die Durchbiegung		110
4.17	Verformungen eines Biegeträgersystems (unterschiedliche Biegesteifigkeiten)		113
4.18	Verformungsberechnung bei schiefer Biegung (Kragträger)		115
4.19	Verformungen bei durch einen Stab gekoppelte Biegeträger (statisch unbestimmtes System)		117
<b>5 Torsion</b>			119
5.1	zulässige Schubspannung und zulässiger spezifischer Verdrehungswinkel		120
5.2	Torsionsstäbe mit Vollquerschnitt und kreisrundem Rohrquerschnitt		122
5.3	abgesetzter Drillstab (Reihenschaltung)		124
5.4	Parallel geschaltete Torsionsfedern (einfach statisch unbestimmt)		125

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
5.5	Torsionsstab mit dünnwandigem geschlossenem Querschnitt (BREDT'sche Formeln)		127
5.6	Torsionsstäbe mit dünnwandigem geschlossenem und offenem Querschnitt		129
5.7	Torsionsstab mit unterschiedlichen Querschnitten		132
<b>6 Querkraftschub; Schubmittelpunkt</b>			133
6.1	Schubspannungen infolge Querkraft		134
6.2	Schubspannungsverlauf infolge Querkraft, Schubmittelpunkt		137
6.3	Dünnwandiger Träger mit C-Profil		141
6.4	Schubspannungen in Verbindungsmitteln (Schweißnähte)		143
<b>7 Knickung</b>			145
7.1	EULER-Fall 2; Belastbarkeitsrechnung (kreuzförmiger Querschnitt)		146
7.2	EULER-Fall 1; Entwurfsrechnung (Rohrquerschnitt)		148
7.3	EULER-Fall 2; Belastbarkeitsrechnung (Winkelstahl)		149
7.4	Vergleich der Knicksicherheiten zweier Fachwerke		151
7.5	Grundfall 2; Belastbarkeitsrechnung (Rechteckquerschnitt); TETMAJER und EULER		153

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
7.6	Grundfall 1; Entwurfsrechnung (Ellipsenquerschnitt); EULER und TETMAJER		154
7.7	Druckstab mit 4 verschiedenen Querschnitten gleichen Flächeninhalts; EULER		156
<b>8 Aufgaben mit Anwendungen aus verschiedenen Gebieten der Elastostatik</b>			157
8.1	Anwendungen aus den Gebieten: Zug, Druck, Biegung, Knickung. Statisch unbestimmtes System		158
8.2	Auf Zug, Biegung und Torsion belastetes Rohr; MOHRscher Spannungskreis		162
8.3	Auf Biegung und Torsion belasteter abgewinkelter Träger; Verschiebungen		165
8.4	Dimensionierung einer Welle (Gestaltänderungsenergiehypothese)		167
8.5	Auf Druck, Biegung und Torsion belastete Säule; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		169
8.6	Auf Innendruck und Torsion belastetes dünnwandiges, geschlossenes Rohr; Kesselformeln; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		171
8.7	Auf Biegung und Torsion beanspruchter Stab; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		172

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
8.8	Auf Biegung und Torsion beanspruchte Blattfeder; Durchsenkung; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		173
8.9	Auf Biegung und Torsion beanspruchter Träger; erforderlicher Durchmesser; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		175
8.10	Normalkraft, Biegung und Torsion; maximale Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		176
8.11	Schrumpfring auf Vollwelle; Wärmedehnung; erforderliche Temperaturerhöhung		180
8.12	Schrumpfring auf Ring; Wärmedehnung; Berührungskreisdurchmesser und Spannungen		181
<b>9 Aufgaben zu CASTIGLIANO, MOHRsches Arbeitsintegral (Arbeitssatz), Kraftgrößenverfahren</b>			183
9.1	Durchbiegung und Neigungswinkel mit dem Satz von CASTIGLIANO		184
9.2	Verschiebung eines abgewinkelten Trägers mithilfe des Satzes von CASTIGLIANO		185
9.3	Statisch unbestimmtes System; Auflagerreaktionen mithilfe des Satzes von CASTIGLIANO		186
9.4	Durchbiegung mithilfe des MOHRschen Arbeitsintegrals (Arbeitssatz)		187



Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
9.5	Verschiebung mithilfe des MOHRschen Arbeitsintegrals (Arbeitssatz)		189
9.6	Statisch unbestimmtes System; Auflagerreaktion mithilfe des Kraftgrößenverfahrens		190
	<b>Computerunterstütztes Lösen von Aufgaben; Programme QUERP und BIEGNO</b>		215
Beispiel zu QUERP	Querschnittswerte (Schwerpunkt, Flächenträgheitsmomente)		218
Aufgabe zu QUERP	Querschnittswerte (Schwerpunkt, Flächenträgheitsmomente)		219
Beispiel zu BIEGNO	Biegung; Querschnittswerte, Spannungs-Nulllinie und Spannungsverteilung		229
Aufgabe zu BIEGNO	Biegung mit Normalkraftbeanspruchung; Querschnittswerte, Spannungs-Nulllinie und Spannungsverteilung		230
Aufgabe zu BIEGNO	Biegung; Querschnittswerte, Spannungs-Nulllinie und Spannungsverteilung		231

### **3 *Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente***

**Aufgabe 3.1:**

Ein Träger wird aus vier Teilen zusammenschweißt. Je nach Anordnung der Teile, entstehen die drei in Bild 3.1 gezeigten Trägerquerschnitte mit gleichem Flächeninhalt der Querschnittsfläche.

Für jeden Querschnitt sind die axialen Flächenträgheitsmomente und Widerstandsmomente für die Achsen  $y$  und  $z$  durch die Flächenschwerpunkte zu berechnen. Wie groß sind die Deviationsmomente (Zentrifugalmomente)  $I_{yz}$ ?

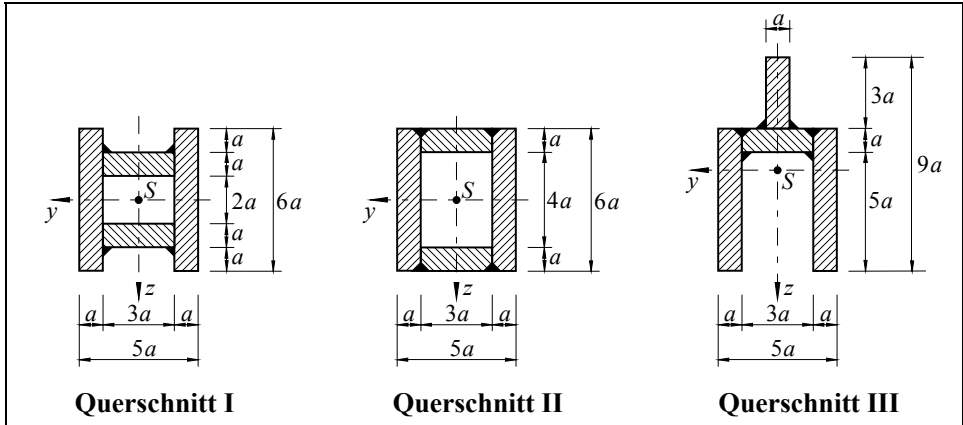


Bild 3.1: Drei verschiedene Querschnittsflächen mit gleichem Querschnittsflächeninhalt

**Lösung:****Querschnitt I:**

Da der Querschnitt zur  $y$ - und  $z$ -Achse symmetrisch ist, sind  $y$  und  $z$  Schwerpunktsachsen (Bild 3.1.1).

Zur Berechnung der Flächenträgheitsmomente wird der Querschnitt in vier Teilflächen aufgeteilt (Bild 3.1.1).

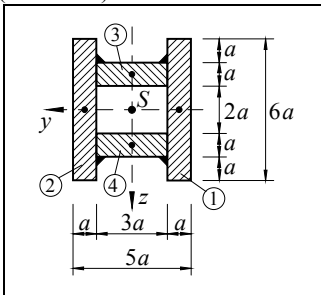


Bild 3.1.1: Querschnitt I in Teilflächen aufgeteilt

Es gilt:

$$I_y = \sum_{i=1}^4 I_{y_i} + \sum_{i=1}^4 A_i \cdot z_{s_i}^2$$

mit  $I_{y_i}$ : Flächenträgheitsmoment der Teilfläche  $i$  bezogen auf deren Schwerpunktschwerachse  $y_i$

$A_i$ : Flächeninhalt der Teilfläche  $i$

$z_{s_i}$ : Abstand zwischen den parallelen Schwerpunktschwerachsen  $y_i$  der Teilfläche  $i$  und  $y$  der Gesamtquerschnittsfläche

$A_i \cdot z_{s_i}^2$  wird als STEINER-Anteil der Teilfläche  $i$  bezeichnet.

$$I_y = 2 \cdot \frac{a(6a)^3}{12} + 2 \cdot \frac{3aa^3}{12} + 2 \cdot 3aa \left( \frac{3}{2}a \right)^2 \quad (\text{Da die Schwerpunkte der Teilflächen ① und ② auf der } y\text{-Achse des Gesamtschwerpunktes liegen, sind ihre STEINER-Anteile null.)}$$

$$I_{y_1} = I_{y_2} \quad I_{y_3} = I_{y_4} \quad \text{STEINER-Anteil}$$

$$I_y = 36a^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{27}{2}a^4 = \underline{\underline{50a^4}}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^4 I_{z_i} + \sum_{i=1}^4 A_i \cdot y_{S_i}^2 \quad \text{mit } y_{S_i}: \text{ Abstand zwischen den parallelen Achsen } z_i \text{ und } z$$

$$I_z = 2 \frac{a(3a)^3}{12} + 2 \frac{6aa^3}{12} + 2 \cdot 6aa(2a)^2, \quad I_z = \frac{9}{2}a^4 + a^4 + 48a^4 = \underline{\underline{53,5a^4}}.$$

**Widerstandsmomente:**  $W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|}$  ;  $W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|}$

mit  $z_{\max}$ : größter Abstand eines Randpunktes von der Schwerpunktschwerachse  $y$

$y_{\max}$ : größter Abstand eines Randpunktes von der Schwerpunktschwerachse  $z$

$$W_y = \frac{50a^4}{3a} = \underline{\underline{16,67a^3}}, \quad W_z = \frac{53,5a^4}{2,5a} = \underline{\underline{21,4a^3}}.$$

**Deviationsmoment:** Allgemein gilt  $I_{yz} = -\int_A yz dA.$

$I_{yz} = \underline{\underline{0}}$  , weil mindestens eine der beiden Schwerpunktschwerachsen  $y$  und  $z$  eine Symmetrieachse der Fläche ist (hier sind beide Symmetrieachsen).

$I_{yz}$  wird immer dann null, wenn zu jedem Flächenelement bei  $x, y$  ein entsprechendes mit einem negativen Produkt  $x \cdot y$  existiert.

**Querschnitt II:**

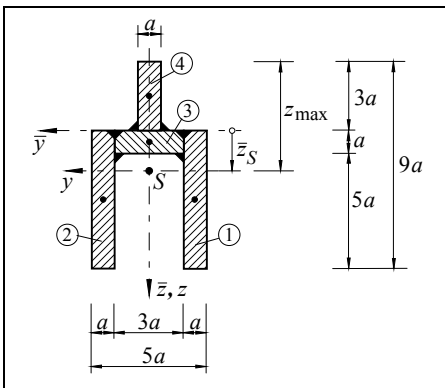
Lösungsweg analog zu Querschnitt I.

$$I_y = 2 \frac{a(6a)^3}{12} + 2 \frac{3aa^3}{12} + 2 \cdot 3aa \left( \frac{5}{2}a \right)^2, \quad I_y = 36a^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{75}{2}a^4 = \underline{\underline{74a^4}}.$$

$$I_z = 2 \frac{a(3a)^3}{12} + 2 \frac{6aa^3}{12} + 2 \cdot 6aa(2a)^2, \quad I_z = \frac{9}{2}a^4 + a^4 + 48a^4 = \underline{\underline{53,5a^4}}.$$

$$W_y = \frac{74a^4}{3a} = \underline{\underline{24,67a^3}}, \quad W_z = \frac{53,5a^4}{2,5a} = \underline{\underline{21,4a^3}}, \quad I_{yz} = \underline{\underline{0}}.$$

**Querschnitt III:**



Der Querschnitt ist zur  $z$ -Achse symmetrisch. Zur Berechnung wird der Querschnitt in Teilflächen zerlegt und ein Bezugskoordinatensystem  $\bar{y}, \bar{z}$  eingeführt (Bild 3.1.2).

Lage des Schwerpunkts:

$$\bar{z}_S \cdot A = \sum_{i=1}^4 \bar{z}_{S_i} \cdot A_i$$

$$\bar{z}_S = \frac{2 \cdot 3a \cdot 6a^2 + \frac{a}{2} \cdot 3a^2 + \left( -\frac{3}{2}a \right) \cdot 3a^2}{18a^2}$$

$$\bar{z}_S = \frac{33}{18}a = 1,8\bar{3}a$$

Bild 3.1.2: Aufgeteilter Querschnitt III mit Bezugskoordinatensystem  $\bar{y}, \bar{z}$

$$I_y = \sum_{i=1}^4 I_{y_i} + \sum_{i=1}^4 A_i \cdot (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$$

mit  $\bar{z}_{S_i}$ : Abstand der Schwerpunktsachse  $y_i$  der Teilfläche  $i$  zur Bezugsachse  $\bar{y}$

$\bar{z}_S$ : Abstand der Schwerpunktsachse  $y$  zur Bezugsachse  $\bar{y}$

$(\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$ : Abstand zwischen den Achsen  $y_i$  und  $y$  (Bild 3.1.2).

$A_i \cdot (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$  wird als STEINER-Anteil der Teilfläche  $i$  bezeichnet.

$$I_y = 2 \left( \frac{a(6a)^3}{12} + 6aa(3a - 1,8\bar{3}a)^2 \right) \quad \rightarrow \text{Teilfläche ① und ②}$$

$$+ \frac{3aa^3}{12} + 3aa \left( \frac{a}{2} - 1,8\bar{3}a \right)^2 \quad \rightarrow \text{Teilfläche ③}$$

$$+ \frac{a(3a)^3}{12} + 3aa \left( -\frac{3}{2}a - 1,8\bar{3}a \right)^2 \quad \rightarrow \text{Teilfläche ④}$$

$$I_y = \underline{\underline{93,5a^4}}$$

$$I_z = 2 \frac{6aa^3}{12} + 2 \cdot 6aa(2a)^2 + \frac{a(3a)^3}{12} + \frac{3aa^3}{12} = \underline{\underline{51,5a^4}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|} ; \quad |z_{\max}| = |\bar{z}_S| + 3a = 1,8\bar{3}a + 3a = 4,8\bar{3}a \quad (\text{siehe Bild 3.1.2})$$

$$W_y = \frac{93,5a^4}{4,8\bar{3}a} = \underline{\underline{19,345a^3}}, \quad W_z = \frac{51,5a^4}{2,5a} = \underline{\underline{20,6a^3}}.$$

$I_{yz} = \underline{\underline{0}}$ , weil eine der beiden Schwerpunktsachsen eine Symmetrieachse ist (hier ist es die  $z$ -Achse).

### Anmerkungen:

- Bei den Querschnitten I, II und III sind die Deviationsmomente  $I_{yz} = 0$ . Dies bedeutet, daß die Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$  auch Hauptträgheitsachsen sind.
- Beim Vergleich der Querschnitte I, II und III (gleicher Flächeninhalt) bezüglich der Flächenträgheitsmomente und Widerstandsmomente um die jeweilige horizontale Schwerpunktsachse  $y$  ergibt sich (siehe untenstehende Tabelle):

Das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  vom Querschnitt I ist am kleinsten, das von Querschnittsfläche III am größten.

Folglich wäre die Durchbiegung eines Trägers mit Querschnitt III bei Biegung um die  $y$ -Achse am geringsten. Wegen des kleineren Widerstandsmoments wäre die Biegespannung im Querschnitt III allerdings größer als im Querschnitt II.

Bei Biegung um die  $y$ -Achse würde im Querschnitt I die größte Biegespannung und die größte Durchbiegung entstehen.

	Querschnitt I	Querschnitt II	Querschnitt III
$I_y$	$50a^4$	$74a^4$	$93,5a^4$
$W_y$	$16,67a^3$	$24,67a^3$	$19,345a^3$

Tabelle: Zum Vergleich der Querschnitte

**Aufgabe 3.2:**

Für einen rechtwinkligen Dreiecksquerschnitt (Bild 3.2) sind bezüglich der Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$  zu berechnen:

1. die axialen Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  und das Deviationsmoment  $I_{yz}$ ,
2. die Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$  und die Lage der Hauptachsen für das Seitenverhältnis  $h/b = 2$ .

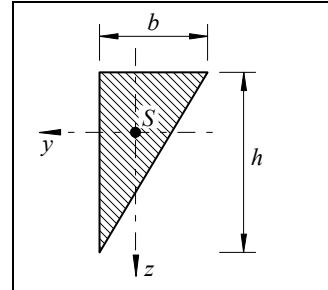


Bild 3.2: Rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt

**Lösung:****zu 1.**

Zuerst werden die Flächenträgheitsmomente und das Deviationsmoment auf ein Bezugssystem  $\bar{y}, \bar{z}$  berechnet, um sie anschließend auf das parallel verschobene Koordinatensystem  $y, z$  durch die Schwerachsen umzurechnen.

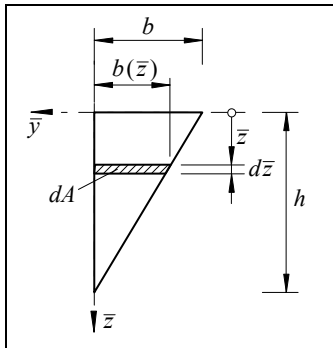


Bild 3.2.1: Querschnitt mit Bezugssystem  $\bar{y}, \bar{z}$  und Flächenelement  $dA$

Dazu legen wir das Bezugssystem  $\bar{y}, \bar{z}$  fest und zeichnen ein Flächenelement  $dA$  (Breite  $b(\bar{z})$ , Höhe  $d\bar{z}$ ) im Abstand  $\bar{z}$  von der  $\bar{y}$ -Achse ein (Bild 3.2.1).

$$\frac{b}{h} = \frac{b(\bar{z})}{h - \bar{z}}$$

$$b(\bar{z}) = b \left( 1 - \frac{\bar{z}}{h} \right)$$

$$dA = b(\bar{z}) d\bar{z}$$

$$I_{\bar{y}} = \int_A \bar{z}^2 dA = b \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=h} \bar{z}^2 \left( 1 - \frac{\bar{z}}{h} \right) d\bar{z} = b \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=h} \left( \bar{z}^2 - \frac{\bar{z}^3}{h} \right) d\bar{z}$$

$$I_{\bar{y}} = b \left( \frac{\bar{z}^3}{3} - \frac{\bar{z}^4}{4h} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

Für die Berechnung von  $I_{\bar{z}}$  gehen wir analog vor, allerdings benutzen wir das Flächenelement  $dA = h(\bar{y}) d\bar{y}$  nach Bild 3.2.2.

$$I_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}^2 dA = \int_A \bar{y}^2 h(\bar{y}) d\bar{y}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{h(\bar{y})}{b + \bar{y}} \rightarrow (\bar{y} \text{ ist vorzeichengerecht einzusetzen})$$

$$h(\bar{y}) = h \left( 1 + \frac{\bar{y}}{b} \right)$$

$$I_{\bar{z}} = h \int_{\bar{y}=-b}^{\bar{y}=0} \bar{y}^2 \left( 1 + \frac{\bar{y}}{b} \right) d\bar{y} = h \int_{-b}^0 \left( \bar{y}^2 + \frac{\bar{y}^3}{b} \right) d\bar{y}$$

$$I_{\bar{z}} = h \left( \frac{\bar{y}^3}{3} + \frac{\bar{y}^4}{4b} \right) \Big|_{-b}^0 = -h \left( \frac{(-b)^3}{3} + \frac{(-b)^4}{4b} \right) = \frac{hb^3}{12}$$

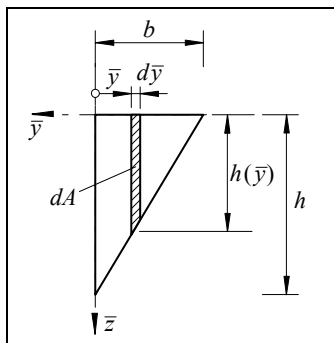


Bild 3.2.2: Für die Berechnung des Flächenträgheitsmoments bezüglich der  $\bar{z}$ -Achse

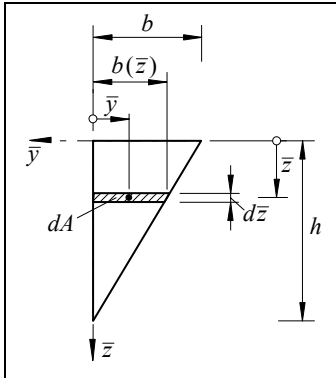


Bild 3.2.3: Zur Berechnung des Deviationsmoments  $I_{y\bar{z}}$

### Deviationsmoment:

$$I_{y\bar{z}} = - \int_A \bar{y}\bar{z} dA \quad (\bar{y} \text{ und } \bar{z} \text{ vorzeichengerecht einsetzen; Bild 3.2.3)}$$

$$\bar{y} = -\frac{b(\bar{z})}{2}; \quad \frac{b}{h} = \frac{b(\bar{z})}{h-\bar{z}}; \quad b(\bar{z}) = b\left(1-\frac{\bar{z}}{h}\right)$$

$$\bar{y} = -\frac{b(\bar{z})}{2} = -\frac{b}{2}\left(1-\frac{\bar{z}}{h}\right); \quad dA = b(\bar{z}) d\bar{z}$$

$$I_{y\bar{z}} = - \int_A \left(-\frac{b}{2}\left(1-\frac{\bar{z}}{h}\right)\right) \bar{z} b\left(1-\frac{\bar{z}}{h}\right) d\bar{z}$$

$$I_{y\bar{z}} = \frac{b^2}{2} \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=h} \left(\bar{z} - 2\frac{\bar{z}^2}{h} + \frac{\bar{z}^3}{h^2}\right) d\bar{z} = \frac{b^2}{2} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2}{3}h^2 + \frac{1}{4}h^2\right)$$

$$I_{y\bar{z}} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

### Umrechnung auf die Schwerpunktsachsen $y$ und $z$ :

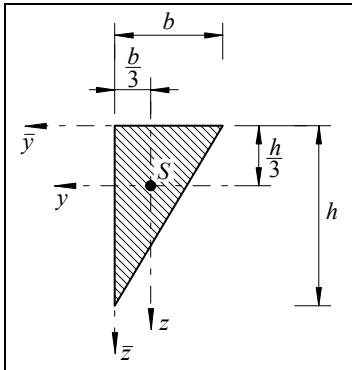


Bild 3.2.4: Zur Umrechnung auf die Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$

Mit dem STEINERSchen Satz folgt (Bild 3.2.4):

$$I_{y\bar{z}} = I_y + \bar{z}_S^2 A \quad \Rightarrow \quad I_y = I_{y\bar{z}} - \bar{z}_S^2 A$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{36}$$

Analog folgt:

$$I_z = \frac{hb^3}{12} - \left(-\frac{b}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{y\bar{z}} = I_{yz} - \bar{y}_S \bar{z}_S A \quad \Rightarrow \quad I_{yz} = I_{y\bar{z}} + \bar{y}_S \bar{z}_S A$$

$$I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{24} + \left(-\frac{b}{3}\right) \left(\frac{h}{3}\right) \frac{1}{2}bh = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

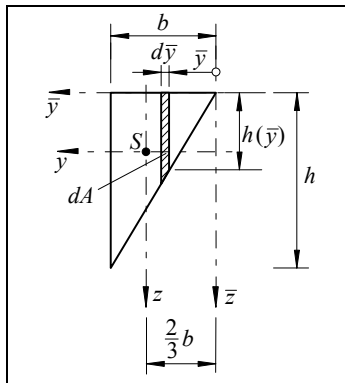


Bild 3.2.5: Zur Berechnung von  $I_z$  (andere Bezugsachse  $\bar{z}$ )

### Alternativer Lösungsweg für die Berechnung von $I_z$ durch Wahl einer anderen Bezugsachse $\bar{z}$ (Bild 3.2.5):

$$\frac{h}{b} = \frac{h(\bar{y})}{\bar{y}}; \quad h(\bar{y}) = \frac{h}{b}\bar{y} \quad (\text{Bild 3.2.5})$$

$$I_{z\bar{z}} = \int_{\bar{y}=0}^{\bar{y}=b} \bar{y}^2 dA = \int_0^b \bar{y}^2 \frac{h}{b} \bar{y} d\bar{y}$$

$$I_{z\bar{z}} = \frac{h}{b} \frac{\bar{y}^4}{4} \Big|_0^b = \frac{hb^3}{4}$$

$$I_z = I_{z\bar{z}} - \bar{y}_S^2 A = \frac{hb^3}{4} - \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \frac{1}{2}bh$$

$$I_z = \frac{hb^3}{36}$$

**zu 2.****Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptachsen für das Seitenverhältnis h/b=2:**

Für das Seitenverhältnis h/b=2 gilt:  $I_y = \frac{h^4}{72}$  ;  $I_z = \frac{h^4}{288}$  ,  $I_{yz} = -\frac{h^4}{288}$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{h^4}{72} + \frac{h^4}{288} \right) \pm \sqrt{4 \left( \frac{h^4}{72} - \frac{h^4}{288} \right)^2 + \left( -\frac{h^4}{288} \right)^2}$$

$$I_{1,2} = h^4 \left( \frac{5}{576} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4 \cdot 288^2} + \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{288^2}} \right) = h^4 \left( \frac{5}{576} \pm \frac{1}{576} \sqrt{13} \right)$$

$$I_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{576} h^4 \Rightarrow I_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{576} h^4 = 0,01494 h^4 ; \quad I_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{576} h^4 = 0,002421 h^4$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (\text{Richtung der Hauptachsen})$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2 \left( -\frac{h^4}{288} \right)}{\frac{h^4}{72} - \frac{h^4}{288}} = -\frac{2}{3} ; \quad 2\varphi^* = -33,7^\circ \Rightarrow \varphi_1^* = -16,85^\circ ; \quad \varphi_2^* = \varphi_1^* + 90^\circ = 73,15^\circ$$

Die Zuordnung der Winkel  $\varphi_1^*$  und  $\varphi_2^*$  zu den Hauptträgheitsmomenten (Bild 3.2.6) erhält man durch Einsetzen eines Winkels in die folgende Transformationsbeziehung für gedrehte Achsensysteme:

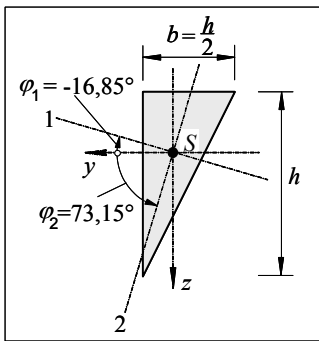


Bild 3.2.6: Lage der Hauptachsen 1 und 2

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$\text{mit } 2\varphi = 2\varphi_1^* = 2(-16,85^\circ) = -33,7^\circ$$

$$I_\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{h^4}{72} + \frac{h^4}{288} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{h^4}{72} - \frac{h^4}{288} \right) \cos(-33,7^\circ) + \left( -\frac{h^4}{288} \right) \sin(-33,7^\circ)$$

$$I_\eta = \left( \frac{5}{576} + \frac{3}{576} \cdot 0,832 - \frac{1}{288} (-0,555) \right) h^4 = \underline{0,01494 h^4 = I_1} ;$$

also gehört zu diesem Hauptträgheitsmoment der Winkel  $\varphi_1^* = -16,85^\circ$ .

Somit  $\varphi_1 = \varphi_1^* = \underline{-16,85^\circ}$  und  $\varphi_2 = \varphi_2^* = \underline{73,15^\circ}$  (Bild 3.2.6).

Vorteilhafter lässt sich der Winkel  $\varphi_1$ , der zwischen der y-Achse und der Hauptachse 1 liegt (Bild 3.2.6), mit einer der folgenden Formeln direkt berechnen:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{I_z - I_2}{I_{yz}} = \frac{I_{yz}}{I_1 - I_z} = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_z - I_2}{I_{yz}} = \frac{h^4}{288} - 0,002421 h^4 = -0,3028 ; \quad \varphi_1 = \underline{-16,85^\circ} .$$

Bei diesem Beispiel ist auch recht anschaulich zu sehen (Bild 3.2.6), dass zu  $\varphi_1$  das größte Flächenträgheitsmoment  $I_1$  gehört, da die Produkte (Fläche mal "Abstand zum Quadrat") bezüglich der Hauptachse 1 ( $\varphi_1$ ) größer sind als um die Hauptachse 2 ( $\varphi_2$ ).



**Aufgabe 3.3:**

Für den Querschnitt (Bild 3.3) sind zu berechnen:

1. die axialen Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  sowie das Deviationsmoment  $I_{yz}$  bezüglich der Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$ ,
2. die Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$  und die Lage der Hauptachsen.

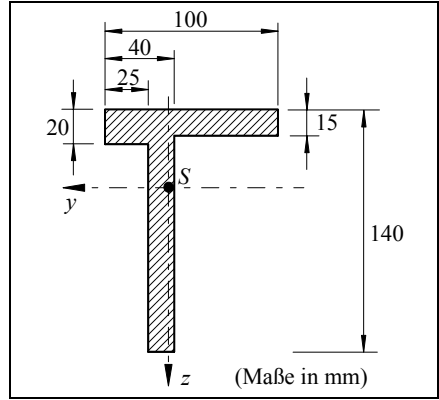


Bild 3.3: Unsymmetrischer T-förmiger Querschnitt

**Lösung:****zu 1.**

Die Lösung erfolgt mit der Summation über Teilflächen. Dazu wird der Querschnitt in drei Teilflächen zerlegt (Bild 3.3.1). Die Ausschnittfläche ③ (Fehlfläche) geht in die Berechnungen für die Fläche und die Flächenträgheitsmomente *negativ* ein. Selbstverständlich kann auch eine andere Zerlegung gewählt werden.

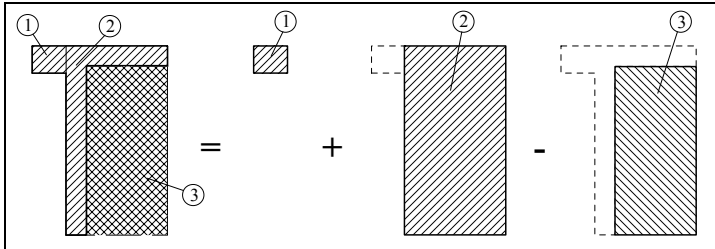


Bild 3.3.1: Querschnitt in Teilflächen zerlegt (Summation über Teilflächen)

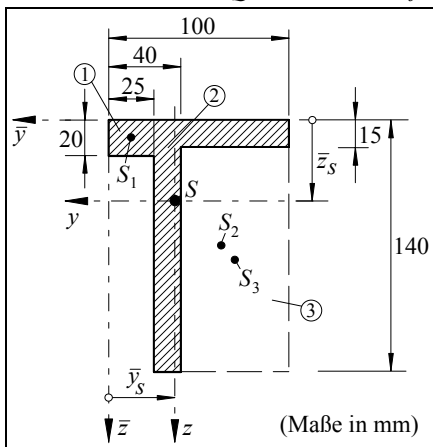


Bild 3.3.2: Querschnitt mit Einteilung und Bezugssystem  $\bar{y}, \bar{z}$

Den folgenden Berechnungen liegt die Einteilung nach Bild 3.3.1 zugrunde.

Lage des Schwerpunkts (Bild 3.3.2):

$$\bar{y}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_{S_i} A_i}{A}$$

$$\bar{y}_S = \frac{(-1,25)2,5 \cdot 2 + (-6,25)7,5 \cdot 14 - (-7)6 \cdot 12,5}{2,5 \cdot 2 + 7,5 \cdot 14 - 6 \cdot 12,5} \text{ cm}$$

$$\bar{y}_S = \frac{-137,5}{35} \text{ cm} = -3,93 \text{ cm}$$

$$\bar{z}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_{S_i} A_i}{A}$$

$$\bar{z}_S = \frac{1 \cdot 2,5 \cdot 2 + 7 \cdot 7,5 \cdot 14 - 7,75 \cdot 6 \cdot 12,5}{2,5 \cdot 2 + 7,5 \cdot 14 - 6 \cdot 12,5} \text{ cm}$$

$$\bar{z}_S = \frac{158,75}{35} \text{ cm} = 4,54 \text{ cm}$$

alternativ: Tabellenrechnung

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i}$	$\bar{z}_{S_i}$	$\bar{y}_{S_i} A_i$	$\bar{z}_{S_i} A_i$
Dim.	-	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>
	1	5	-1,25	1	-6,25	5
	2	105	-6,25	7	-656,25	735
	3	-75	-7	7,75	525	-581,25
$\Sigma$		35 = $\Sigma A_i = A$			-137,5 = $\Sigma \bar{y}_{S_i} A_i$	158,75 = $\Sigma \bar{z}_{S_i} A_i$

$$\bar{y}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_{S_i} A_i}{A} = \frac{-137,5}{35} \text{ cm} = -3,93 \text{ cm}$$

$$\bar{z}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_{S_i} A_i}{A} = \frac{158,75}{35} \text{ cm} = 4,54 \text{ cm}$$

**Flächenträgheitsmomente:**

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i} + \sum_{i=1}^n A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2 \quad (\text{Bild 3.3.2})$$

$\frac{I_y}{\text{cm}^4} = \frac{2,5 \cdot 2^3}{12}$	$\Rightarrow 1,67$	$\rightarrow$	Teilfläche ①, Eigenträgheitsmoment
$+ 2,5 \cdot 2 \cdot (1 - 4,54)^2$	$\Rightarrow 62,66$	$\rightarrow$	Teilfläche ①, STEINER-Anteil
$+ \frac{7,5 \cdot 14^3}{12}$	$\Rightarrow 1715$	$\rightarrow$	Teilfläche ②, Eigenträgheitsmoment
$+ 7,5 \cdot 14 \cdot (7 - 4,54)^2$	$\Rightarrow 635,42$	$\rightarrow$	Teilfläche ②, STEINER-Anteil
$- \frac{6 \cdot 12,5^3}{12}$	$\Rightarrow -976,56$	$\rightarrow$	Teilfläche ③, Eigenträgheitsmoment
$- 6 \cdot 12,5 \cdot (7,75 - 4,54)^2$	$\Rightarrow -772,81$	$\rightarrow$	Teilfläche ③, STEINER-Anteil
	<u>665,38</u>		

$$I_y = \underline{\underline{665,38 \text{ cm}^4}}$$

alternativ: Tabellenrechnung

	$i$	$A_i$	$\bar{z}_{S_i}$	$\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S$	$A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$	$I_{y_i}$	$I_{y_i} + A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$
Dim.	-	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
	1	5	1	-3,54	62,66	1,67	64,33
	2	105	7	2,46	635,42	1715	2350,42
	3	-75	7,75	3,21	-772,81	-976,56	-1749,37
$\Sigma$							665,38 = $I_y$

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i} + \sum_{i=1}^n A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2 \quad (\text{Bild 3.3.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{I_z}{\text{cm}^4} &= \frac{2 \cdot 2,5^3}{12} && \Rightarrow 2,60 && \rightarrow \text{Teilfläche ①, Eigenträgheitsmoment} \\ &+ 2,5 \cdot 2 \cdot (-1,25 - (-3,93))^2 && \Rightarrow 35,91 && \rightarrow \text{Teilfläche ①, STEINER-Anteil} \\ &+ \frac{14 \cdot 7,5^3}{12} && \Rightarrow 492,19 && \rightarrow \text{Teilfläche ②, Eigenträgheitsmoment} \\ &+ 7,5 \cdot 14 \cdot (-6,25 - (-3,93))^2 && \Rightarrow 565,15 && \rightarrow \text{Teilfläche ②, STEINER-Anteil} \\ &- \frac{12,5 \cdot 6^3}{12} && \Rightarrow -225 && \rightarrow \text{Teilfläche ③, Eigenträgheitsmoment} \\ &- 6 \cdot 12,5 \cdot (-7 - (-3,93))^2 && \Rightarrow -706,87 && \rightarrow \text{Teilfläche ③, STEINER-Anteil} \\ &&&&& 163,98 \end{aligned}$$

$$I_z = \underline{\underline{163,98 \text{ cm}^4}}$$

alternativ: Tabellenrechnung

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i}$	$\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S$	$A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$	$I_{z_i}$	$I_{z_i} + A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$
Dim.	-	$\text{cm}^2$	cm	cm	$\text{cm}^4$	$\text{cm}^4$	$\text{cm}^4$
	1	5	-1,25	2,68	35,91	2,60	38,51
	2	105	-6,25	-2,32	565,15	492,19	1057,34
	3	-75	-7	-3,07	-706,87	-225	-931,87
$\Sigma$							163,98 = $I_z$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{yz_i} - \sum_{i=1}^n A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S) \quad (\text{Bild 3.3.2})$$

Das Deviationsmoment  $I_{yz}$  ergibt sich ausschließlich aus STEINER-Anteilen, da die Deviationsmomente der Rechtecke bezüglich ihrer *eigenen* Schwerpunktsachsen (Symmetrieachsen) null sind.

$$\begin{aligned} \frac{I_{yz}}{\text{cm}^4} &= -2,5 \cdot 2 \cdot (-1,25 - (-3,93))(1 - 4,54) && \Rightarrow 47,44 && \rightarrow \text{Teilfläche ①, STEINER-Anteil} \\ &- 7,5 \cdot 14 \cdot (-6,25 - (-3,93))(7 - 4,54) && \Rightarrow 599,26 && \rightarrow \text{Teilfläche ②, STEINER-Anteil} \\ &- (6 \cdot 12,5 \cdot (-7 - (-3,93))(7,75 - 4,54)) && \Rightarrow -739,10 && \rightarrow \text{Teilfläche ③, STEINER-Anteil} \\ &&&&& -92,40 \end{aligned}$$

$$I_{yz} = \underline{\underline{-92,40 \text{ cm}^4}}$$

alternativ: Tabellenrechnung

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S$	$\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S$	$A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$	$I_{yz_i}$	$I_{yz_i} - A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$
Dim.	-	$\text{cm}^2$	cm	cm	$\text{cm}^4$	$\text{cm}^4$	$\text{cm}^4$
	1	5	2,68	-3,54	-47,44	0	47,44
	2	105	-2,32	2,46	-599,26	0	599,26
	3	-75	-3,07	3,21	739,10	0	-739,10
$\Sigma$							-92,40 = $I_{yz}$

**zu 2.**

**Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptachsen:**

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{1,2} = \left( \frac{665,38 + 163,98}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{665,38 - 163,98}{2}\right)^2 + (-92,40)^2} \right) \text{cm}^4$$

$$I_{1,2} = (414,68 \pm 267,19) \text{cm}^4$$

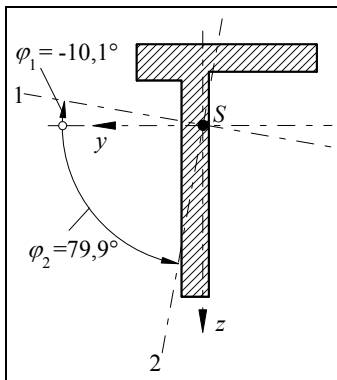
$$I_1 = \underline{\underline{681,87 \text{ cm}^4}}$$

$$I_2 = \underline{\underline{147,49 \text{ cm}^4}}$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (\text{Richtung der Hauptachsen})$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2(-92,40)}{665,38 - 163,98} = -0,3686; \quad 2\varphi^* = -20,2^\circ \Rightarrow \varphi_1^* = -10,1^\circ; \quad \varphi_2^* = \varphi_1^* + 90^\circ = 79,9^\circ$$

Die Zuordnung der Winkel  $\varphi_1^*$  und  $\varphi_2^*$  zu den Hauptträgheitsmomenten (Bild 3.3.3) erhält man durch Einsetzen eines Winkels in die folgende Transformationsbeziehung für gedrehte Achsensysteme:



$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$\text{mit } 2\varphi = 2\varphi_1^* = 2(-10,1^\circ) = -20,2^\circ$$

$$I_\eta = \frac{665,38 + 163,98}{2} \text{cm}^4 + \frac{665,38 - 163,98}{2} \text{cm}^4 \cos(-20,2^\circ) + (-92,40 \text{cm}^4) \sin(-20,2^\circ)$$

$$I_\eta = (414,68 + 235,28 + 31,9) \text{cm}^4 = \underline{\underline{681,86 \text{ cm}^4}} = I_1;$$

also gehört zu diesem Hauptträgheitsmoment der Winkel  $\varphi_1^* = -10,1^\circ$ .

Bild 3.3.3: Lage der Hauptachsen 1 und 2

Somit  $\varphi_1 = \varphi_1^* = \underline{\underline{-10,1^\circ}}$  und  $\varphi_2 = \varphi_2^* = \underline{\underline{79,9^\circ}}$  (Bild 3.3.3).

Vorteilhafter lässt sich der Winkel  $\varphi_1$ , der zwischen der y-Achse und der Hauptachse 1 liegt (Bild 3.3.3), mit einer der folgenden Formeln direkt berechnen:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{I_z - I_2}{I_{yz}} = \frac{I_{yz}}{I_1 - I_z} = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2} = \frac{-92,40}{665,38 - 147,49} = -0,1784; \quad \varphi_1 = \underline{\underline{-10,1^\circ}}.$$

**Aufgabe 3.4:**

Für den gegebenen Rechteckquerschnitt (Bild 3.4) sollen die Flächenträgheitsmomente bezüglich der horizontalen  $\eta$ -Achse und der vertikalen  $\zeta$ -Achse sowie das Deviationsmoment  $I_{\eta\zeta}$  berechnet werden.

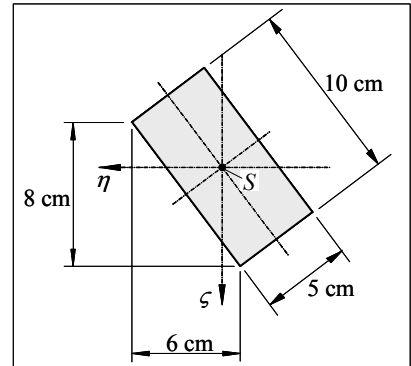


Bild 3.4: Gedrehter Rechteckquerschnitt

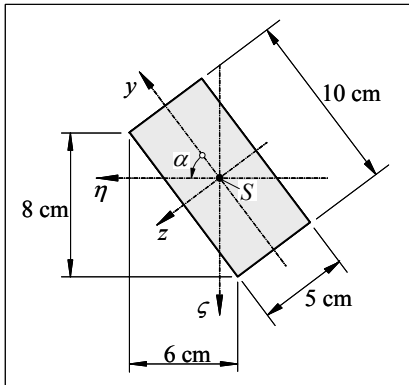
**Lösung:**

Bild 3.4.1: Zur Umrechnung der Flächenträgheitsmomente auf das gedrehte  $\eta, \zeta$ -Koordinatensystem

Zunächst berechnen wir für das gewählte  $y, z$ -Koordinatensystem (Bild 3.4.1) nach den bekannten Formeln für ein Rechteck die Trägheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$ .

$$I_y = \frac{10 \cdot 5^3}{12} \text{ cm}^4 = 104,17 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{5 \cdot 10^3}{12} \text{ cm}^4 = 416,7 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 0 \quad (\text{wegen Symmetrie})$$

$$\alpha = \arctan \frac{8}{6} = 53,13^\circ$$

Es gilt folgende Transformation der Flächenträgheitsmomente auf ein gedrehtes Koordinatensystem (Bild 3.4.1):

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

Mit den oben ausgerechneten Werten folgt:

$$I_\eta = \left( \frac{104,17 + 416,7}{2} + \frac{104,17 - 416,7}{2} \cos 2 \cdot 53,13^\circ + 0 \right) \text{ cm}^4 = \underline{\underline{304,2 \text{ cm}^4}}$$

$$I_\zeta = \left( \frac{104,17 + 416,7}{2} - \frac{104,17 - 416,7}{2} \cos 2 \cdot 53,13^\circ - 0 \right) \text{ cm}^4 = \underline{\underline{216,7 \text{ cm}^4}}$$

$$I_{\eta\zeta} = \left( -\frac{104,17 - 416,7}{2} \sin 2 \cdot 53,13^\circ + 0 \right) \text{ cm}^4 = \underline{\underline{150 \text{ cm}^4}}$$

**Aufgabe 3.5:**

Der Querschnitt nach Bild 3.5 ist aus einem  $\square 350$  (DIN 1026), einem  $\square 300$  (DIN 1026) und einem ungleichschenkligen Winkelstahl  $\angle 150 \times 100 \times 10$  (DIN 1029) zusammengesetzt (geschweißt).

Zu berechnen sind:

1. die axialen Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  sowie das Deviationsmoment  $I_{yz}$  bezüglich der Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$ ,
2. die Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$  und die Lage der Hauptachsen.

**Hinweis:** Die benötigten Angaben für die Profile sind aus geeigneten Handbüchern (z.B. Stahlbau-Taschenkalender) zu entnehmen.

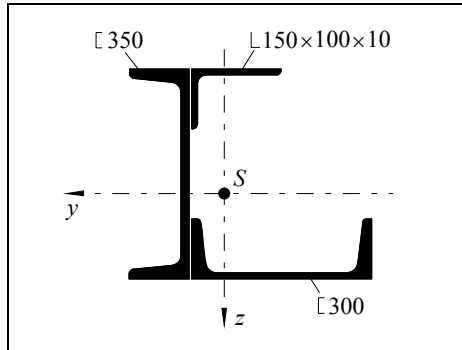


Bild 3.5: Aus Stahlbau-Profilen zusammengesetzter Querschnitt

**Lösung:**

**zu 1.**

Die Lösung erfolgt mit der Summation über Teilflächen. Teilflächen sind in diesem Falle die drei Profilquerschnitte (Bild 3.5.1). Zuerst schreiben wir uns die erforderlichen Kenndaten für die Profile aus entsprechenden Profiltafeln heraus (Tabellen 1 und 2):

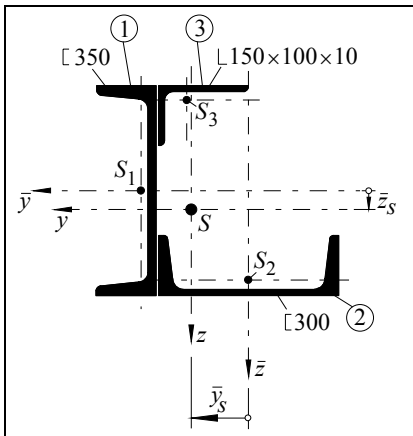


Bild 3.5.1: Einteilung des Querschnitts und Festlegung eines Bezugskordinatensystems  $\bar{y}, \bar{z}$

**Tabelle 1; Teilflächen ① und ②:**

	$\square 350$ : Teilfläche ① $h = 350\text{mm}$ $b = 100\text{mm}$ $A = 77,3\text{cm}^2$ $I_x = 12840\text{cm}^4$ $I_y = 570\text{cm}^4$ $e_y = 2,40\text{cm}$
	$\square 300$ : Teilfläche ② $h = 300\text{mm}$ $b = 100\text{mm}$ $A = 58,8\text{cm}^2$ $I_x = 8030\text{cm}^4$ $I_y = 495\text{cm}^4$ $e_y = 2,70\text{cm}$

**Tabelle 2; Teilfläche ③:**

	$\angle 150 \times 100 \times 10$ : $A = 24,2\text{cm}^2$ $e_x = 4,80\text{cm}$ $e_y = 2,34\text{cm}$ $I_x = 552\text{cm}^4$ $I_y = 198\text{cm}^4$ Lage der Achse $\eta - \eta$ : $\tan \alpha = 0,442$
--	--

Für die Berechnung der Schwerpunktlage legen wir zweckmäßig die Bezugsachsen  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  so, dass sie mit jeweils einer Schwerachse der beiden  $\square$ -Profile zusammenfallen (Bild 3.5.1).

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i}$	$\bar{z}_{S_i}$	$\bar{y}_{S_i} A_i$	$\bar{z}_{S_i} A_i$
Dim.	-	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>
	1	77,3	17,4	0	1345,02	0
	2	58,8	0	14,8	0	870,24
	3	24,2	10,2	-15,16	246,84	-366,87
$\Sigma$		160,3 = $\Sigma A_i = A$			1591,86 = $\Sigma \bar{y}_{S_i} A_i$	503,37 = $\Sigma \bar{z}_{S_i} A_i$

$$\bar{y}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_{S_i} A_i}{A} = \frac{1591,86}{160,3} \text{ cm} = 9,93 \text{ cm}$$

$$\bar{z}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_{S_i} A_i}{A} = \frac{503,37}{160,3} \text{ cm} = 3,14 \text{ cm}$$

### Flächenträgheitsmomente:

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i} + \sum_{i=1}^n A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2 \quad (\text{Bild 3.5.1})$$

	$i$	$A_i$	$\bar{z}_{S_i}$	$\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S$	$A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$	$I_{y_i}$	$I_{y_i} + A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$
Dim.	-	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
	1	77,3	0	-3,14	762,15	12840	13602,15
	2	58,8	14,8	11,66	7994,19	495	8489,19
	3	24,2	-15,16	-18,30	8104,34	198	8302,34
$\Sigma$							30393,68 = $I_y$

$$I_y = \underline{\underline{30393,68 \text{ cm}^4}}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i} + \sum_{i=1}^n A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2 \quad (\text{Bild 3.5.1})$$

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i}$	$\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S$	$A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$	$I_{z_i}$	$I_{z_i} + A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$
Dim.	-	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
	1	77,3	17,4	7,47	4313,41	570	4883,41
	2	58,8	0	-9,93	5797,97	8030	13827,97
	3	24,2	10,2	0,27	1,76	552	553,76
$\Sigma$							19265,14 = $I_z$

$$I_z = \underline{\underline{19265,14 \text{ cm}^4}}$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{yz_i} - \sum_{i=1}^n A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S) \quad (\text{Bild 3.5.1})$$

Für den ungleichschenkligen Winkelstahl (Teilfläche ③) ist in der Profiltafel kein Deviationsmoment angegeben, statt dessen wird der Tangens der Winkeldrehung des Hauptachsensystems gegenüber dem Ausgangssystem angegeben (Tabelle 2, Seite 57). Mit dem Additionstheorem

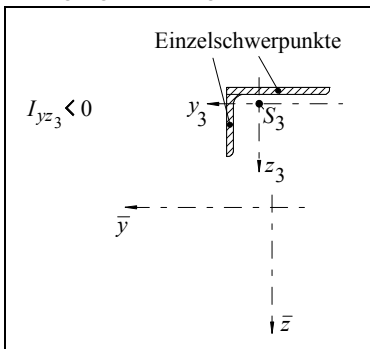
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{folgt aus}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (\text{Richtung der Hauptachsen) für das Deviationsmoment}$$

$$I_{yz} = \left( \underset{I_y}{I_y} - \underset{I_z}{I_z} \right) \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (1)$$

$I_x, I_y$  ← Bezeichnungen in der verwendeten Profiltafel (Tabelle 2, Seite 57)

Da diese Gleichung (1) stets positive Werte liefert, das Vorzeichen des Deviationsmoments aber von der Lage des Profilquerschnitts im Bezugssystem abhängt, ist die folgende Überlegung notwendig.



Die allgemeine Definition des Deviationsmoments lautet:

$$I_{yz} = - \int_A yz dA. \quad (2)$$

Wenn wir nun den ungleichschenkligen Winkelstahlquerschnitt (Teilfläche ③) in zwei Rechteckflächen zerlegen und die Lage ihrer Einzelzentren (Bild 3.5.2) im  $y_3, z_3$ -Koordinatensystem betrachten, sehen wir, dass die  $y_3 \cdot z_3$ -Produkte jeweils bezüglich der Einzelzentren im  $y_3, z_3$ -Koordinatensystem ein positives Vorzeichen haben. Unter Berücksichtigung der obigen allgemeinen Definition (Gleichung (2)) ergibt sich also ein negatives Vorzeichen von  $I_{yz_3}$ .

Bild 3.5.2: Zur Erläuterung des Vorzeichens von  $I_{yz_i}$  (Teilfläche ③)

Aus dieser Überlegung und der obigen Gleichung (1) folgt nun für die Teilfläche ③:

$$I_{yz_3} = -(552 - 198) \text{cm}^4 \frac{0,442}{1 - 0,442^2} = -194,5 \text{cm}^4.$$

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S$	$\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S$	$A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$	$I_{yz_i}$	$I_{yz_i} - A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$
Dim.	-	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
	1	77,3	7,47	-3,14	-1813,13	0	1813,13
	2	58,8	-9,93	11,66	-6808,09	0	6808,09
	3	24,2	0,27	-18,30	-119,57	-194,5	-74,93
$\Sigma$							8546,29 = $I_{yz}$

$$I_{yz} = \underline{\underline{8546,29 \text{ cm}^4}}$$



**zu 2.****Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptachsen:**

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{1,2} = \left( \frac{30393,68 + 19265,14}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30393,68 - 19265,14}{2}\right)^2 + 8546,29^2} \right) \text{cm}^4$$

$$I_{1,2} = (24829,41 \pm 10198,05) \text{cm}^4$$

$$I_1 = \underline{\underline{35027,46 \text{ cm}^4}}$$

$$I_2 = \underline{\underline{14631,36 \text{ cm}^4}}$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (\text{Richtung der Hauptachsen})$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2 \cdot 8546,29}{30393,68 - 19265,14} = 1,536$$

$$2\varphi^* = 56,93^\circ \Rightarrow \varphi_1^* = 28,465^\circ; \quad \varphi_2^* = \varphi_1^* + 90^\circ = 118,465^\circ$$

Die Zuordnung der Winkel  $\varphi_1^*$  und  $\varphi_2^*$  zu den Hauptträgheitsmomenten (Bild 3.5.3) erhält man durch Einsetzen eines Winkels in die folgende Transformationsbeziehung für gedrehte Achsensysteme:

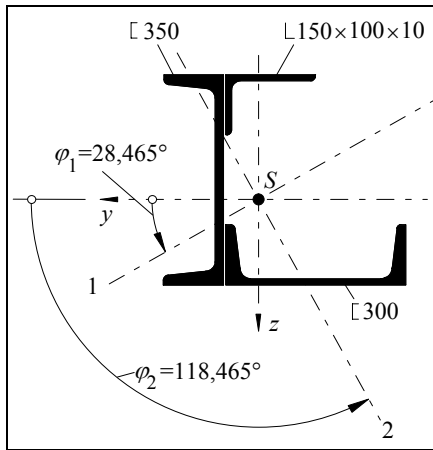


Bild 3.5.3: Lage der Hauptachsen 1 und 2

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$\text{mit } 2\varphi = 2\varphi_1^* = 2 \cdot 28,465^\circ = 56,93^\circ$$

$$I_\eta = \frac{30393,68 + 19265,14}{2} \text{cm}^4 + \frac{30393,68 - 19265,14}{2} \text{cm}^4 \cos 56,93^\circ + 8546,29 \text{cm}^4 \sin 56,93^\circ$$

$$I_\eta = (24829,41 + 3036,22 + 7161,83) \text{cm}^4$$

$$I_\eta = \underline{\underline{35027,46 \text{ cm}^4}} = I_1;$$

also gehört zu diesem Hauptträgheitsmoment der Winkel  $\varphi_1^* = 28,465^\circ$ .

Somit  $\varphi_1 = \varphi_1^* = \underline{\underline{28,465^\circ}}$  und  $\varphi_2 = \varphi_2^* = \underline{\underline{118,465^\circ}}$

(Bild 3.5.3).

Vorteilhafter lässt sich der Winkel  $\varphi_1$ , der zwischen der y-Achse und der Hauptachse 1 liegt (Bild 3.5.3), mit einer der folgenden Formeln direkt berechnen:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{I_z - I_2}{I_{yz}} = \frac{I_y - I_z}{I_1 - I_2} = \frac{I_{yz}}{I_y - I_z}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{8546,29}{35027,46 - 19265,14} = 0,5422 \quad ; \quad \varphi_1 = \underline{\underline{28,46^\circ}}$$

**Aufgabe 3.6:**

Für den Querschnitt (Bild 3.6) sind zu berechnen:

1. die axialen Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  sowie das Deviationsmoment  $I_{yz}$  bezüglich der Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$ ,
2. die Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$  und die Lage der Hauptachsen.

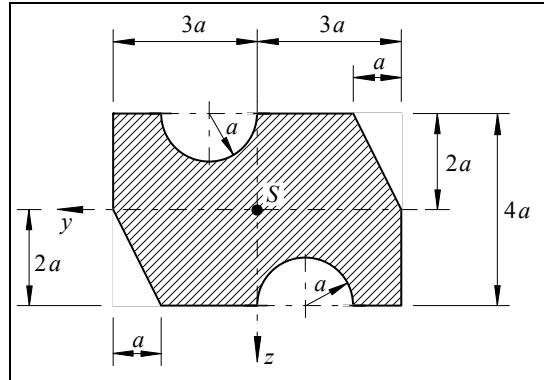


Bild 3.6: Aus Grundflächen (Rechteck, Dreieck, Halbkreis) zusammengesetzter Querschnitt

**Lösung:**

**zu 1.**

Die Lösung erfolgt mit der Summation über Teilflächen. Dazu wird der Querschnitt in fünf Teilflächen zerlegt (Bild 3.6.1). Die Ausschnittflächen (Fehlflächen) ②, ③, ④ und ⑤ gehen in die Berechnungen *negativ* ein.

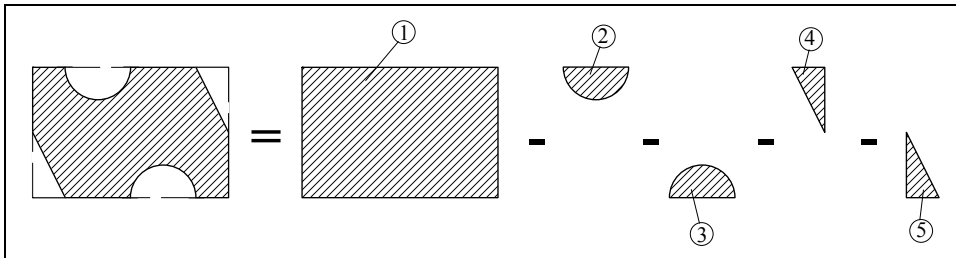


Bild 3.6.1: Querschnitt in fünf Teilflächen zerlegt (Summation über Teilflächen)

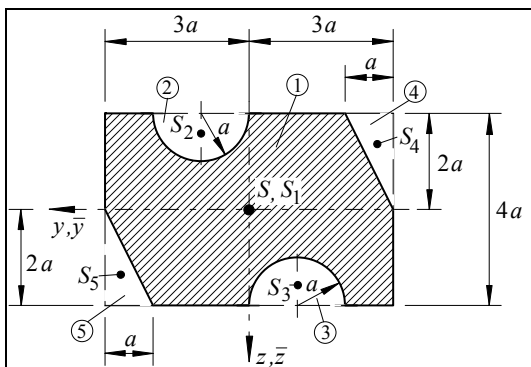


Bild 3.6.2: Querschnitt mit Einteilung und Bezugssystem  $\bar{y}, \bar{z}$

Für die Ermittlung der Schwerpunktlage legen wir die Bezugsachsen  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  durch den Schwerpunkt der Teilfläche ① (Rechteck) (Bild 3.6.2). Da die statischen Momente der übrigen Teilflächen auf beiden Seiten der Bezugsachsen  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  die gleichen Beträge haben, liegt der Gesamtschwerpunkt auf diesen Bezugsachsen.

Somit  $\bar{y}_S = 0$  und  $\bar{z}_S = 0$ .

**Flächenträgheitsmomente:**

Bevor wir die Tabellenrechnung durchführen, schreiben wir uns die wichtigsten Formeln für die Teilflächen (Halbkreis und Dreieck) aus geeigneten Handbüchern oder Formelsammlungen heraus (Formeln für eine Rechteckfläche sollten bekannt sein).

Teilfläche ② und ③ (Halbkreis):

	$A = \frac{\pi}{2} r^2$ $I_y = 0,1098 r^4$ $I_z = 0,3927 r^4$ $e = 0,4244 r$ $I_{yz} = 0$
--	---

Teilfläche ④ und ⑤ (Dreieck):

	$A = \frac{bh}{2}$ $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{36}$ $I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{72}$
--	--

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i} + \sum_{i=1}^n A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2 \quad (\text{Bild 3.6.2})$$

	$i$	$\frac{A_i}{a^2}$	$\frac{\bar{z}_{S_i}}{a}$	$\frac{\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S}{a}$	$\frac{A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2}{a^4}$	$\frac{I_{y_i}}{a^4}$	$\frac{I_{y_i} + A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2}{a^4}$
	1	24	0	0	0	32	32
	2	-1,5708	-1,5756	-1,5756	-3,8995	-0,1098	-4,0093
	3	-1,5708	1,5756	1,5756	-3,8995	-0,1098	-4,0093
	4	-1	-1,3333	-1,3333	-1,7777	-0,2222	-2
	5	-1	1,3333	1,3333	-1,7777	-0,2222	-2
$\Sigma$							19,9814 = $I_y / a^4$

$$I_y = \underline{\underline{19,9814 a^4}}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i} + \sum_{i=1}^n A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2 \quad (\text{Bild 3.6.2})$$

	$i$	$\frac{A_i}{a^2}$	$\frac{\bar{y}_{S_i}}{a}$	$\frac{\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S}{a}$	$\frac{A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2}{a^4}$	$\frac{I_{z_i}}{a^4}$	$\frac{I_{z_i} + A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2}{a^4}$
	1	24	0	0	0	72	72
	2	-1,5708	1	1	-1,5708	-0,3927	-1,9635
	3	-1,5708	-1	-1	-1,5708	-0,3927	-1,9635
	4	-1	-2,6666	-2,6666	-7,1111	-0,0555	-7,1667
	5	-1	2,6666	2,6666	-7,1111	-0,0555	-7,1667
$\Sigma$							53,7396 = $I_z / a^4$

$$I_z = \underline{\underline{53,7396 a^4}}$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{yz_i} - \sum_{i=1}^n A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S) \quad (\text{Bild 3.6.2})$$

	$i$	$\frac{A_i}{a^2}$	$\frac{\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S}{a}$	$\frac{\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S}{a}$	$\frac{A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)}{a^4}$	$\frac{I_{yz_i}}{a^4}$	$\frac{I_{yz_i} - A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)}{a^4}$
	1	24	0	0	0	0	0
	2	-1,5708	1	-1,5756	2,4750	0	-2,4750
	3	-1,5708	-1	1,5756	2,4750	0	-2,4750
	4	-1	-2,6666	-1,3333	-3,5556	-0,055	3,5
	5	-1	2,6666	1,3333	-3,5556	-0,055	3,5
$\Sigma$							2,05 = $I_{yz} / a^4$

$$I_{yz} = \underline{\underline{2,05 a^4}}$$

**zu 2.**

**Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptachsen:**

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{1,2} = \frac{19,9814a^4 + 53,7396a^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{19,9814a^4 - 53,7396a^4}{2}\right)^2 + (2,05a^4)^2}$$

$$I_{1,2} = 36,8605a^4 \pm 17,0031a^4$$

$$I_1 = \underline{\underline{53,8636a^4}}$$

$$I_2 = \underline{\underline{19,8574a^4}}$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (\text{Richtung der Hauptachsen})$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2 \cdot 2,05a^4}{19,9814a^4 - 53,7396a^4} = -0,12145$$

$$2\varphi^* = -6,92^\circ \Rightarrow \varphi_1^* = -3,46^\circ; \quad \varphi_2^* = \varphi_1^* + 90^\circ = 86,54^\circ$$

Die Zuordnung der Winkel  $\varphi_1^*$  und  $\varphi_2^*$  zu den Hauptträgheitsmomenten (Bild 3.6.3) erhält man durch Einsetzen eines Winkels in die folgende Transformationsbeziehung für gedrehte Achsensysteme:

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$\text{mit } 2\varphi = 2\varphi_1^* = 2(-3,46^\circ) = -6,92^\circ$$

$$I_\eta = \frac{19,9814a^4 + 53,7396a^4}{2} + \frac{19,9814a^4 - 53,7396a^4}{2} \cos(-6,92^\circ) + 2,05a^4 \sin(-6,92^\circ)$$

$$I_\eta = 36,8605a^4 - 16,7561a^4 - 0,2470a^4 = \underline{\underline{19,8574a^4}} = I_2;$$

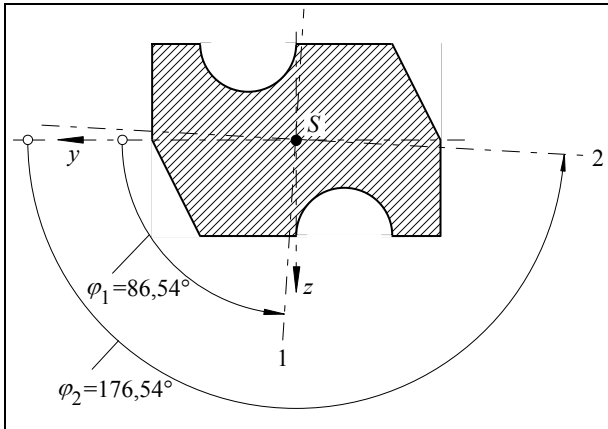


Bild 3.6.3: Lage der Hauptachsen 1 und 2

also gehört zu diesem Hauptträgheitsmoment der Winkel  $\varphi_1^* = -3,46^\circ$ .

Folglich gehört der andere Winkel ( $86,54^\circ$ ) zu  $I_1$ ; somit  $\varphi_1 = \varphi_2^* = \underline{\underline{86,54^\circ}}$  (Bild 3.6.3).

Da die Hauptachse 2 der Hauptachse 1 in einem Rechts-Koordinatensystem vorauslaufen muss (Bild 3.6.3), ist:

$$\varphi_2 = \varphi_1^* + 180^\circ = -3,46^\circ + 180^\circ$$

$$\varphi_2 = \underline{\underline{176,54^\circ}}.$$

Vorteilhafter lässt sich der Winkel  $\varphi_1$ , der zwischen der y-Achse und der Hauptachse 1 liegt (Bild 3.6.3), mit einer der folgenden Formeln direkt berechnen:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{I_z - I_2}{I_{yz}} = \frac{I_{yz}}{I_1 - I_z} = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{53,8636 a^4 - 19,9814 a^4}{2,05 a^4} = 16,5279 \quad ; \quad \varphi_1 = \underline{\underline{86,54^\circ}}.$$

**Aufgabe 3.7:**

Für den Querschnitt (Bild 3.7) sind zu berechnen:

1. die Schwerpunktlage,
2. die axialen Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  sowie das Deviationsmoment  $I_{yz}$  bezüglich der Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$ ,
3. die Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$  und die Lage der Hauptachsen.

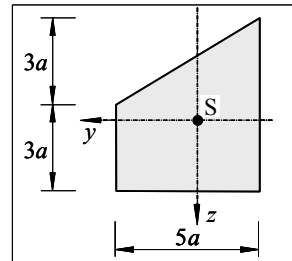


Bild 3.7: Trapezförmiger Querschnitt

**Lösung:**

**zu 1.**

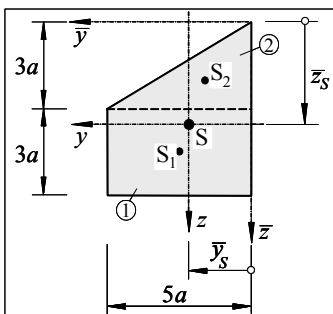


Bild 3.7.1: Querschnitt mit Einteilung und Bezugsachsensystem  $\bar{y}, \bar{z}$

**zu 2.**

**Flächenträgheitsmomente**

Teilfläche ① (Rechteck)

	$A = bh$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$ $I_{yz} = 0$
--	--

Teilfläche ② (Dreieck)

	$A = \frac{bh}{2}$ $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{36}$ $I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$
--	---

$$I_y = \sum I_{y_i} + \sum A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$$

	$i$	$A_i$	$\bar{z}_{S_i}$	$\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S$	$A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$	$I_{y_i}$	$I_{y_i} + A_i (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)^2$
	1	$15a^2$	$\frac{9}{2}a$	$\frac{5}{6}a$	$\frac{375}{36}a^4$	$\frac{135}{12}a^4$	$\frac{780}{36}a^4$
	2	$\frac{15}{2}a^2$	$2a$	$-\frac{5}{3}a$	$\frac{125}{6}a^4$	$\frac{135}{36}a^4$	$\frac{885}{36}a^4$
$\Sigma$							$\frac{1665}{36}a^4 = I_y$

$$I_y = \frac{1665}{36} a^4 = \frac{185}{4} a^4 = \underline{\underline{46,25 a^4}}$$

$$I_z = \sum I_{z_i} + \sum A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$$

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i}$	$\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S$	$A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$	$I_{z_i}$	$I_{z_i} + A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S)^2$
	1	$15 a^2$	$\frac{5}{2} a$	$\frac{5}{18} a$	$\frac{375}{324} a^4$	$\frac{375}{12} a^4$	$\frac{10500}{324} a^4$
	2	$\frac{15}{2} a^2$	$\frac{5}{3} a$	$-\frac{5}{9} a$	$\frac{375}{162} a^4$	$\frac{375}{36} a^4$	$\frac{4125}{324} a^4$
$\Sigma$							$\frac{14625}{324} a^4 = I_z$

$$I_z = \frac{14625}{324} a^4 = \frac{1625}{36} a^4 = \underline{\underline{45,14 a^4}}$$

$$I_{yz} = \sum I_{yz_i} - \sum A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$$

	$i$	$A_i$	$\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S$	$\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S$	$A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$	$I_{yz_i}$	$I_{yz_i} - A_i (\bar{y}_{S_i} - \bar{y}_S) (\bar{z}_{S_i} - \bar{z}_S)$
	1	$15 a^2$	$\frac{5}{18} a$	$\frac{5}{6} a$	$\frac{375}{108} a^4$	0	$-\frac{375}{108} a^4$
	2	$\frac{15}{2} a^2$	$-\frac{5}{9} a$	$-\frac{5}{3} a$	$\frac{375}{54} a^4$	$-\frac{225}{72} a^4$	$-\frac{2175}{216} a^4$
$\Sigma$							$-\frac{2925}{216} a^4 = I_{yz}$

$$I_{yz} = -\frac{2925}{216} a^4 = -\frac{325}{24} a^4 = \underline{\underline{-13,54 a^4}}$$

**zu 3.**

**Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptachsen:**

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2},$$

$$I_{1,2} = \frac{46,25 a^4 + 45,14 a^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{46,25 a^4 - 45,14 a^4}{2}\right)^2 + (-13,54 a^4)^2},$$

$$I_{1,2} = 45,695 a^4 \pm 13,551 a^4, \quad I_1 = \underline{\underline{59,246 a^4}}, \quad I_2 = \underline{\underline{32,144 a^4}}.$$

Der Winkel  $\varphi_1$ , der zwischen der y-Achse und der Hauptachse 1 liegt (Bild 3.7.2), wird mit einer der folgenden Formeln direkt berechnet:

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{I_z - I_2}{I_{yz}} = \frac{I_{yz}}{I_1 - I_z} = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2},$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_1 - I_y}{I_{yz}} = \frac{59,246 a^4 - 46,25 a^4}{-13,54 a^4} = -0,9598,$$

$$\varphi_1 = \underline{\underline{-43,825^\circ}}.$$

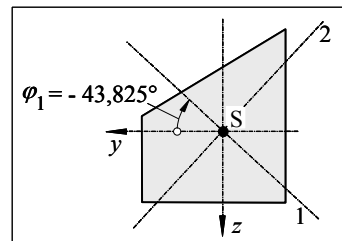


Bild 3.7.2: Lage der Hauptachsen 1 und 2